A propos du calcul des rentabilités des actions et des rentabilités moyennes…

On peut calculer les rentabilités de différentes façons, sous différentes hypothèses. Cette note n'a d'autre prétention que d'attirer votre attention sur quelques aspects du sujet. Pour des approfondissements consultez un manuel de mathématiques financières ou de finance !

Supposons que P_t désigne le cours de l'action au temps t, P_{t-1} le cours de l'action au temps $t-1$, Div_t, le dividende versé en t. Alors la rentabilité **totale** de l'action entre t et $t-1$ (= la rentabilité sur une période, par exemple un an) est donnée par :

$$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + Div_t}{P_{t-1}} \qquad [1]$$

En faisant la somme des rentabilités de $t = 1$ à $t = T$ (T désignant le nombre de périodes ou d'observations, par exemple le nombre d'années), on peut calculer une **rentabilité moyenne arithmétique** (par exemple une rentabilité moyenne annuelle) :

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_T}{T} = \frac{\sum_{t=1}^{t=T} r_t}{T} \qquad [2]$$

Une rentabilité annuelle calculée selon l'équation (ou méthode) [1] est une rentabilité **discrète (ou taux discret de rentabilité)**. Il est toutefois possible de calculer les rentabilités autrement. Si l'année est subdivisée en une **infinité de périodes** (par exemple en secondes !) la rentabilité annuelle se calcule selon l'équation suivante :

$$r_t = ln\left(\frac{P_t + Div_t}{P_{t-1}}\right) \qquad [3]$$

Une rentabilité annuelle calculée selon l'équation (ou méthode) [3] est une rentabilité **continue (ou taux continu de rentabilité)**. Vous voyez ainsi qu'on distingue rentabilité discrète et rentabilité continue selon la façon dont on « découpe » ou « compose » le temps.

Une comparaison des rentabilités calculées selon les deux méthodes montrera clairement qu'elles ne sont pas égales !

La suite de cette note explique la méthode de **composition continue des intérêts**.

1. Composition continue des intérêts

Supposons que *r* représente le taux d'intérêt (ou taux de rentabilité) **annuel** et que ce taux soit constant (= le même chaque année). Cette hypothèse nous permet de laisser de côté pour le moment la question du calcul de la rentabilité moyenne. En effet, si *r* est constant la rentabilité moyenne $\bar{r}$ est alors égale à *r*, peu importe comment on la calcule.

Supposons que les intérêts soient composés une fois dans l'année (par exemple en fin d'année). Ainsi 1€ placé au taux *r* devient $1€ \times (1+r)$ après une année, puis $1€ \times (1+r) \times (1+r) = 1€ \times (1+r)^2$ après deux années et ainsi de suite. C'est le principe même des **intérêts composés** qui est le principe fondamental de calcul en finance (on utilise la méthode des intérêts simples sur des opérations d'une durée inférieure à un an). A l'issue de *T* années on aura : $1€ \times (1+r)^T$, la **valeur capitalisée** de 1 € au bout de *T* années. En généralisant pour une valeur initiale V_0 :

$$V_T = V_0 \times (1+r)^T \quad [1\text{-}1]$$

Supposons à présent que les intérêts soient composés (calculés) **deux fois par an** (tous les 6 mois) au lieu d'une fois en fin d'année. Le taux d'intérêt annuel étant *r*, le **taux semestriel** est égal à $r/2$ et dès lors 1€ placé en début d'année devient $1€ \times \left(1+\frac{r}{2}\right)$ au bout de 6 mois et $1€ \times \left(1+\frac{r}{2}\right) \times \left(1+\frac{r}{2}\right) = 1€ \times \left(1+\frac{r}{2}\right)^2$ au bout d'un an.

Suivant le même raisonnement, si les intérêts sont composés *n* fois dans l'année 1€ placé en début d'année devient $1€ \times \left(1+\frac{r}{n}\right)$ au bout de la première des *n* périodes infra-annuelles, $1€ \times (1+\frac{r}{n})^n$ au bout d'un an, et $1€ \times (1+\frac{r}{n})^{nT}$ au bout de *T* années. En généralisant pour une valeur initiale V_0:

$$V_T = V_0 \times \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nT} \quad [1\text{-}2]$$

Supposez maintenant que l'année soit décomposée en une **infinité** de périodes. Nous dirons alors que les intérêts sont composés de manière **continue** (à chaque millième de seconde par exemple !).

En d'autres termes si $n \to \infty$ le placement initial 1€ en début d'année devient en fin d'année égal à : 1€× $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ et au bout *T* années égal à : 1€× $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nT}$.

C'est alors que le nombre *e* (*e* comme exponentielle) se rappelle à notre bon souvenir !.... En effet :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Dans notre problème financier nous n'avons pas $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ mais $\left(1+\frac{r}{n}\right)$ – sauf à supposer un taux égal à 100% auquel cas *r* = 1 ! La valeur de notre euro initial devient ainsi égale à $1€ \times e^r$ au terme d'une année, et égale à $1€ \times e^{rT}$ au bout de *T* années. En généralisant pour une valeur initiale V_0:

$$V_T = V_0 \times e^{rT} \qquad [1\text{-}3]$$

Le taux r (taux de rentabilité **annuel**) qui figure dans cette équation [1-3] n'est pas calculé selon l'équation [1], mais selon l'équation [3]. Il s'agit à présent d'en expliquer la raison. Pour commencer posons $T = 1$. En d'autres termes, raisonnons sur une année. On peut alors également réintroduire une notation standard : V_T peut s'écrire V_t et V_0 devient V_{t-1}.

Ensuite procédons à la transformation logarithmique de l'équation [1-3] :

$$lnV_t = lnV_{t-1} + r\ln e \qquad [1\text{-}4]$$

Or ln *e* = 1 et donc :

$$lnV_t = lnV_{t-1} + r \qquad [1\text{-}4 \text{ bis}]$$

On peut alors exprimer r comme une différence de logarithmes :

$$lnV_t - lnV_{t-1} = r \qquad [1\text{-}4 \text{ ter}]$$

Ou encore :

$$r = ln\left(\frac{V_t}{V_{t-1}}\right)$$

Nous retrouvons ainsi l'équation [3].

Application. Reportez-vous au fichier EXCEL des données de DIMSON & alii. Constatez à l'aide d'un graphique que la valeur capitalisée de l'indice des actions américaines sur un siècle suit une évolution exponentielle.

Plus précisément la valeur capitalisée de 1$ investi en actions en 1900 est égale à 15 578,51$ en 2004. Quel est le taux de rentabilité moyen des actions américaines sur cette période ?

Le calcul des rentabilités annuelles selon la méthode indiquée ci-dessus donne une rentabilité sur la première année (entre 1900 et 1901) égale à $ln\left(\frac{1,24}{1}\right) = 0,215$, soit 21,5%. Notez qu'on obtient directement 21,5% en calculant : $ln\left(\frac{1,24}{1}\right) \times 100 = 21,5$. Et ainsi de suite pour les années suivantes. *La différence majeure par rapport à nos calculs précédents est que la rentabilité des actions n'est pas constante, mais varie chaque année*. Il convient donc de calculer une **rentabilité moyenne**. La moyenne **arithmétique** des 104 rentabilités annuelles ainsi calculées (*rentabilités continues*) est égale à $\bar{r} = 0,09282$, soit 9,28%. De sorte que, si on applique ce taux de rentabilité moyen à chacune des 104 années, la valeur *V* de 1$ investi en actions en 1900 devient égale à $1\$ \times e^{rT}$ en 2004 avec $e^{rT} = e^{0,09282 \times 104} = e^{9,6536}$. Ceci nous donne :

$$V_{2004} = V_{1900} \times e^{9,6536} = 1\$ \times e^{9,6536} = 15\,578,51\$$$

Nous retrouvons ainsi la valeur **exacte** indiquée dans la dernière cellule du fichier EXCEL.

Comparez ces résultats à ceux obtenus à partir du calcul des rentabilités **discrètes**. Le calcul des rentabilités annuelles selon la méthode [1] donne une rentabilité sur la première année (entre 1900 et 1901) égale à : $\frac{1{,}24}{1} - 1 = 0{,}24$, soit 24%. Et ainsi de suite pour les années suivantes. La moyenne **arithmétique** des 104 rentabilités ainsi calculées est égale à $\bar{r} = 0{,}1165$, soit 11,65%. De sorte que, si on applique ce taux de rentabilité moyen à chacune des 104 années, la valeur V de 1$ investi en actions en 1900 devient égale en 2004 à $1\$ \times (1 + 0{,}1165)^{104} = 95\,502{,}83\$$. *Nous sommes très au-delà de la valeur effectivement atteinte en 2004*. On voit ainsi que le calcul de la moyenne arithmétique (ou taux de rentabilité moyen) à partir du calcul des rentabilités **discrètes** ne permet pas de reconstituer l'évolution réelle de la valeur du capital entre 1900 et 2004.

Il reste encore une autre combinaison de calculs possible : calculer des rentabilités **discrètes** et calculer une **moyenne géométrique** de ces rentabilités. Il s'agit de trouver le taux $\bar{r}$ tel que : $(1+\bar{r})^{104} = (1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{104})$, d'où : $1+\bar{r} = \left[(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{104})\right]^{1/104}$. On obtient : $1+\bar{r} = 1{,}09727$. Cette rentabilité moyenne de 9,73% est proche de celle que nous avons calculée en combinant rentabilités logarithmiques et moyenne arithmétique. Plus précisément, si vous calculiez l'exponentielle de la moyenne arithmétique des rentabilités logarithmiques vous obtiendriez *exactement* $1+\bar{r} = 1{,}09727$! Ce taux moyen composé sur 104 années permet de retrouver la valeur *exacte* de 2004 : $V_{2004} = 1\$ \times (1 + 0{,}09727)^{104} = 15\,578{,}51\$$.

Ainsi la combinaison {rentabilités logarithmiques, moyenne arithmétique} ou la combinaison {rentabilités discrètes, moyenne géométrique} permettent de reconstituer l'évolution *historique*, passée, de la valeur de l'actif en ce sens qu'elles permettent de retrouver la valeur *exacte* de l'actif à la date t (la date où l'on calcule la moyenne) connaissant sa valeur initiale.

Si ces deux combinaisons rendent compte du passé, plusieurs arguments militent en faveur de la combinaison {rentabilités discrètes, moyenne arithmétique} lorsqu'il s'agit d'envisager l'avenir.

En premier lieu, la valeur d'un actif financier résulte de l'actualisation des revenus futurs, et non passés, qu'il est susceptible de générer, et la rentabilité qui nous importe est sa rentabilité future. Nous ne pouvons que former des conjectures sur ce que pourrait être cette rentabilité, variable aléatoire par essence, et **l'espérance mathématique** des rentabilités futures pour une période donnée s'apparente à une moyenne arithmétique (une moyenne pondérée par les probabilités associées à ces rentabilités) et non pas géométrique des rentabilités possibles. En d'autres termes, la réalisation de chacune des rentabilités possibles dans le futur doit être considérée comme indépendante de la réalisation des autres rentabilités possibles, de sorte que la moyenne de ces rentabilités doit se calculer comme la somme (et non le produit) des rentabilités pondérées par leur probabilité. Calculer la moyenne arithmétique des rentabilités discrètes à partir des données historiques constitue, d'une part, une estimation « raisonnable » de la rentabilité future (moyenne) et, d'autre part, revient à considérer chacune de ces rentabilités comme la réalisation passée d'autant de rentabilités possibles dans le futur, chacune de ces réalisations étant indépendantes des autres. On ne tient alors aucun compte de l'ordre de succession des rentabilités dans le temps (ordre qui détermine la valeur précise de l'actif à chaque date *t* passée) : on considère seulement un « paquet » de rentabilités réalisées (comme si elles s'étaient toutes réalisées au cours de la même période) et donc réalisables dans le futur, à partir duquel on extrait une rentabilité moyenne arithmétique : la rentabilité moyenne des rentabilités futures réalisables, possibles à l'horizon *h* (par exemple au bout d'un an).

En second lieu, la rentabilité d'un portefeuille se calcule comme la moyenne arithmétique (une combinaison linéaire) des rentabilités des actifs qui le composent, or le logarithme d'une somme n'est pas égal à la somme des logarithmes. En d'autres termes, la rentabilité logarithmique d'un portefeuille n'est pas égale à la moyenne arithmétique (combinaison linéaire) des rentabilités logarithmiques des actifs qui le composent. Il ne peut s'agir au mieux que d'une approximation, laquelle est d'autant moins acceptable que la valeur de l'actif subit des variations « fortes » (volatilité élevée).

Annexe

Les rentabilités ne sont pas constantes, mais variables. On notera donc r_t le taux de rentabilité de l'action au cours de la période t. En droite ligne avec ce qui précède, on peut écrire (modéliser) l'évolution du cours d'une action sur une période (entre $t-1$ et t) – par exemple une évolution mensuelle – de la façon suivante :

$$P_t = P_{t-1}e^{r_t} \quad [2\text{-}1]$$

où r_t est le taux de croissance du cours de l'action sur un mois – autrement dit, la **rentabilité mensuelle de l'action**. Par exemple P_t désigne le cours en janvier, P_{t-1} désigne le cours en décembre et r_t est le taux de rentabilité en janvier.

Ainsi sur une **année** et en supposant que r_t désigne la rentabilité mensuelle, le cours de l'action au bout de 12 mois sera égal à :

$$P_{12} = P_0 e^{r_1+r_2+r_3+\cdots+r_{12}} \quad [2\text{-}2].$$

où P_{12} désigne le cours de l'action en décembre de l'année présente (par exemple) et P_0 le cours en décembre de l'année précédente (dans cet exemple) – soit 13 cours mensuels qui permettent de calculer 12 rentabilités mensuelles. Dans ce cas, la rentabilité annuelle est simplement égale à la somme des rentabilités mensuelles.

Cette méthode de calcul nous permet de calculer la **rentabilité mensuelle moyenne** sur un an comme une **moyenne arithmétique** :

$$\bar{r} = \frac{r_1+r_2+r_3+\cdots+r_{12}}{12} \quad [2\text{-}3].$$

Revenons à l'équation [2-1]. En opérant une transformation logarithmique on obtient :

$$lnP_t = lnP_{t-1} + r_t \ln e \qquad [2\text{-}5]$$

Or ln e = 1 et donc :

$$lnP_t = lnP_{t-1} + r_t \qquad [2\text{-}5 \text{ bis}]$$

On peut alors exprimer r_t comme une différence de logarithmes :

$$lnP_t - lnP_{t-1} = r_t \qquad [2\text{-}5 \text{ ter}]$$

Ou encore :

$$r_t = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad [2\text{-}6]$$